IMT1001 Introducción a la Ingeniería Matemática

Tarea: Análisis Numérico

Prof. Manuel A. Sánchez
manuel.sanchez@uc.cl

Problemas:

1. **Test de convergencia**
   Considere el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} = \sin(t) + y, \quad t \in [0,1], \tag{1a}$$

$$y(0) = 0. \tag{1b}$$

1.1 Programe los métodos de Euler explícito y Euler implícito. Verifique numéricamente que estos convergen con orden 1.
1.2 Escriba el método de Crank-Nicolson para el problema de Cauchy y deduzca una cota para el error de truncación del método. Verifique experimentalmente su orden de convergencia aplicándolo al problema (1).
1.3 Programe los métodos explícitos de Runge-Kutta RK2, RK3, RK4 definidos en clases. Verifique experimentalmente sus órdenes convergencia.

2. **Modelo SEQIJR (Susceptible-Exposed-Quarantined-Infected-Isolated-Recovered).**
   Considere el modelo SEQIJR ver (?SEQIJR) para epidemias incluyendo casos asintomáticos, en cuarentena, sintomáticos y en aislamiento,

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= \Pi - \beta\frac{S(t)}{N}\left(\epsilon_E E(t) + \epsilon_Q Q(t) + I(t) + \epsilon_J(t)J(t)\right) - \mu S(t)\\
\frac{dE(t)}{dt} &= p + \beta\frac{S(t)}{N}\left(\epsilon_E E(t) + \epsilon_Q Q(t) + I(t) + \epsilon_J(t)J(t)\right) - (\kappa_1 + \gamma_1(t))E(t) - \mu E(t)\\
\frac{dQ(t)}{dt} &= \gamma_1(t)E(t) - \kappa_2 Q(t) - \mu Q(t)\\
\frac{dI(t)}{dt} &= \kappa_1 E(t) - (\gamma_2(t) + d_1 + \sigma_1)I(t) - \mu I(t)\\
\frac{dJ(t)}{dt} &= \kappa_2 Q(t) + \gamma_2(t)I(t) - (\sigma_2 + d_2)J(t) - \mu J(t)\\
\frac{dR(t)}{dt} &= \sigma_1 I(t) + \sigma_2 J(t) - \mu R(t)
\end{aligned}$$

Con condiciones iniciales dadas por (comienza en Marzo 1)

$$S(0) = 6.5\times 10^6, \quad E(0) = 124, \quad Q(0) = 0, \quad I(0) = 1, \quad J(0) = 0, \quad R(0) = 0,$$

unidad de tiempo t en días y parámetros

$$\beta = 0.15$$

$$\epsilon_E = 0, \quad \epsilon_Q = 0, \quad \epsilon_J = \begin{cases} 0.84, & \text{antes del 30 de marzo} \\ 0, & \text{después del 30 de marzo} \end{cases}$$

$$\kappa_1 = 0.1, \quad \kappa_2 = 0.125$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{antes del 30 de marzo} \\ 0.1, & \text{después del 30 de marzo} \end{cases} \quad \gamma_2 = \begin{cases} 0, & \text{antes del 30 de marzo} \\ 0.5, & \text{después del 30 de marzo} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 0.0337, \quad \sigma_2 = 0.0386$$

$$d_1 = 0.0079, \quad d_2 = 0.0068$$

$$\mu = 0.000034$$

$$\Pi = 221$$

$$p = 0$$

2.1 Simule el modelo hasta un tiempo final de 6 meses utilizando alguno de los métodos programados en la parte 1. Entregue gráficos de la evolución de cada una de las variables.

2.2 Grafique la evolución del número total de casos predecida por el modelo (considere acá casos asintomáticos, sintomáticos, recuperados y decesos.)

2.3 Experimente con el modelo y argumente que parámetro,$\epsilon_E, \epsilon_Q, \epsilon_J$, tiene el mayor impacto en la disminución del número de casos.

3. **Método de diferencias finitas**

Considere la ecuación de Poisson en el intervalo $\Omega = (0,2) \times (0,2)$

$$-\Delta u(x) = f \text{ en } \Omega, \quad \text{y} \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

donde $f(x,y) := 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

3.1 Encuentre la matriz asociada $A \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2}$ y el vector $b \in \mathbb{R}^{(n-1)^2}$ asociados al sistema lineal resultante de la aplicación del método de diferencias finitas centradas de 3 puntos (visto en clase 3) sobre una malla de $(n+1)$-puntos equidistantes en la dirección x y en la dirección y, es decir, obteniendo el metodo de diferencias finitas de 5 puntos en 2 dimensiones. Cree una función con input el número de puntos de la grilla y el dato f, que genere la matriz A y el vector b.

3.2 Use el método del problema anterior para resolver el sistema lineal asociado a la aproximación de diferencias finitas. Grafique la solución aproximada para $n = 15$.

3.3 Para los valores de $n = 2^\ell$, para $\ell = 2, ..., 6$, calcule el error máximo de la aproximación respectiva, esto es, calcule

$$e^n = \max_j |u(x_j) - u_j|.$$

Grafique en escala logarítmica este error versus $\Delta x = 1/n$.